

(时间:120 分钟 分值:150 分)

一、选择题: 本题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. [2026 · 北京理工附中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则下列各数是数列 $\{a_n\}$ 中的项的是 ()
- A. $-\frac{1}{2023}$

B. $\frac{1}{2024}$

C. $-\frac{1}{2025}$

D. $-\frac{1}{2026}$
2. [2025 · 大兴期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n (n \geq 2)$, 则 $a_4 =$ ()
- A. 5

B. 10

C. 11

D. 12
3. [2026 · 朝阳期末] 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_2 a_3 = 2$, 则 $a_7 =$ ()
- A. 64

B. 32

C. 16

D. 8
4. [2026 · 北京清华附中测试] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{5}{3}$, 则 $\frac{a_8}{a_6} =$ ()
- A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{11}{7}$

C. $\frac{13}{9}$

D. $\frac{15}{11}$
5. [2024 · 西城期末] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = -1$, $32S_{10} = 31S_5$, 则 $a_6 =$ ()
- A. $-\frac{1}{32}$

B. $-\frac{1}{64}$

C. $\frac{1}{32}$

D. $\frac{1}{64}$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} \cdot a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 前 n 项和为 S_n , 则 S_{2026} 等于 ()
- A. $2^{2026} - 1$

B. $3 \times 2^{1013} - 1$

C. $3 \times 2^{1013} - 2$

D. $3 \times 2^{1013} - 3$

7. [2026 · 北京人大附中测试] 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 “ $S_n \geq na_n$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 是递减数列” 的 ()
- A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件
8. [2024 · 延庆期末] 设 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的一个排列, 且满足 $|a_1 - a_2| \geq |a_2 - a_3| \geq |a_3 - a_4| \geq |a_4 - a_5| \geq |a_5 - a_6|$, 则 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_6|$ 的最大值是 ()
- A. 17

B. 15

C. 13

D. 11
9. [2024 · 房山期末] 已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, 其中第一项是 2^0 , 接下来的两项是 $2^0, 2^1$, 再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$, 依次类推. S_n 是该数列的前 n 项和, 若 $S_n = 2^t (t \in \mathbf{N}^*)$, 则 n 的值可能为 ()
- A. 16

B. 95

C. 189

D. 330
10. [2024 · 西城期末] 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 若存在常数 $c (c \neq 0)$, 使得对于任意的正整数 m, n , 等式 $a_{m+n} = a_m + ca_n$ 都成立, 则 ()
- A. 满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有无数个

B. 存在满足条件的递减数列 $\{a_n\}$

C. 存在满足条件的等比数列 $\{a_n\}$

D. 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $a_n > 2024$

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. [2025 · 北京八中测试] 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n, S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m = 126$, 则 $m =$ _____.
12. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = \begin{cases} n^2, & n \leq 4, \\ 5n - 4, & n > 4, \end{cases}$ 则 $a_5 =$ _____.
13. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + S_3 = 6, S_3 = 3a_3$, 则 $a_2 =$ _____.
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2a_n - 2$, 则 $a_n =$ _____; 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n - 21$, 数列 $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 T_n 的最大值为 _____.
15. [2025 · 北京景山学校测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 4 (n \in \mathbf{N}^*)$, 给出下列四个结论:
- ① $\{a_n\}$ 的第 2 项大于 1;

② $\{a_n\}$ 为递减数列;

③ $\{a_n\}$ 为等比数列;

④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{2025}$ 的项.
- 其中所有正确结论的序号为 _____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (13 分) [2025 · 北京八一中学测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 3$, $a_2 + a_4 = 9$.
- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式以及前 n 项和 S_n ;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
17. (14 分) [2026 · 西城期末] 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_5 = -2, a_6 =$ 2. 数列 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $b_1 = 1, b_3 - b_2 = 2$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



18. (14 分)[2026 · 北京二中测试] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $3S_n = 4a_n - 3n$.
- (1) 求 a_2, a_3 ;
- (2) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;
- (3) 设 $b_n = n \cdot (a_n + 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (14 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d = 4, a_k = 15, S_k = 36, k \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求 k 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $b_n = \frac{S_n}{n+c}, n \in \mathbf{N}^*$, 若 b_1, b_2, b_3 成等差数列, 求 c 并证明 $\{b_n\}$ 为等差数列.

20. (15 分)[2025 · 延庆期中] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 9, S_5 = 40$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n 的最大值.
- (2) 无穷数列 $\{b_n\}$ 的首项为 3, 前 n 项和为 P_n , 在下列三个条件中选择一个, 使得数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 并解答下列问题.

条件①: $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}^*$;

条件②: $b_2 = -\frac{1}{2}b_1$;

条件③: $P_n = \frac{b_n}{3} + 2, n \in \mathbf{N}^*$.

- (i) 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和;
- (ii) 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $P_n - (-1)^n \cdot A > 0$, 求 A 的取值范围.

21. (15 分)[2024 · 通州期末] 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_n > 0, b_n > 0$,
- $$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, b_{n+1} = b_n + \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}}.$$
- (注: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$)
- (1) 若 $a_1 = 1$, 求 a_2 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $a_{100}b_{100} = a_{101}b_{101}$, 求 $a_1 - b_1$ 的值.